

**IMPLEMENTASI METODE VOLUME HINGGA PADA GELOMBANG  
AIR LAUT DI PERAIRAN SELAT SUNDA**

**SKRIPSI**



**UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A**

Disusun Oleh  
**USWATUN KHASANAH**  
**H02216017**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL  
SURABAYA**

**2019**

**IMPLEMENTASI METODE VOLUME HINGGA PADA GELOMBANG  
AIR LAUT DI PERAIRAN SELAT SUNDA**

**SKRIPSI**

Diajukan guna memenuhi salah satu persyaratan untuk memperoleh  
gelar Sarjana Matematika (S.Mat) pada Program Studi Matematika



**UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A**

Disusun oleh  
**USWATUN KHASANAH**  
**H02216017**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL  
SURABAYA**

**2019**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama : USWATUN KHASANAH

NIM : H02216017

Program Studi : Matematika

Angkatan : 2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " IMPLEMENTASI METODE VOLUME HINGGA PADA GELOMBANG AIR LAUT DI PERAIRAN SELAT SUNDA ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 20 Desember 2019

Yang menyatakan,



USWATUN KHASANAH

NIM. H02216017

## LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama : USWATUN KHASANAH

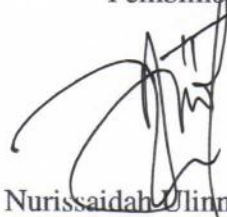
NIM : H02216017

Judul Skripsi : IMPLEMENTASI METODE VOLUME HINGGA PADA  
GELOMBANG AIR LAUT DI PERAIRAN SELAT  
SUNDA

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 20 Desember 2019

Pembimbing



Nurissaidah Ulinuha, M.Kom

NIP. 199011022014032004

## PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI


Skripsi oleh

Nama : USWATUN KHASANAH  
NIM : H02216017  
Judul Skripsi : IMPLEMENTASI METODE VOLUME HINGGA PADA  
GELOMBANG AIR LAUT DI PERAIRAN SELAT  
SUNDA

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji  
pada tanggal Desember 2019

Mengesahkan,  
Tim Penguji

Penguji I



Nurissadah Ulinnuha, M.Kom  
NIP. 199011022014032004

Penguji II



Dian C. Rini Novitasari, M.Kom  
NIP. 198511242014032001

Penguji III



Poutroue Keumala Intan, M.Si  
NIP. 198805282018012001

Penguji IV



Wika Dianita Utami, M.Sc  
NIP. 199206102018012003

Mengetahui,

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Ampel Surabaya



Dr. Eni Purwati, M. Ag

NIP. 196512211990022001



**KEMENTERIAN AGAMA**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA**  
**PERPUSTAKAAN**

Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax. 031-8413300

E-Mail: [perpus@uinsby.ac.id](mailto:perpus@uinsby.ac.id)

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI  
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : USWATUN KHASANAH  
NIM : HO2216017  
Fakultas/Jurusan : SAINS DAN TEKNOLOGI / MATEMATIKA  
E-mail address : uswatun.khasanah741@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

☒ Skripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (.....)  
yang berjudul :

IMPLEMENTASI METODE VOLUME HINGGA PADA GELOMBANG AIR  
LAUT DI PERAIRAN SELAT SUNDA

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara **fulltext** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 31 DESEMBER 2019

Penulis

( USWATUN KHASANAH )

nama terang dan tanda tangan











2.7. Metode Volume Hingga . . . . .	21
2.8. Kestabilan . . . . .	25
2.9. Metode Perturbasi . . . . .	26
<b>III METODE PENELITIAN . . . . .</b>	<b>27</b>
3.1. Jenis Penelitian . . . . .	27
3.2. Tahap Persiapan . . . . .	28
3.2.1. Identifikasi Masalah . . . . .	28
3.2.2. Studi Literatur . . . . .	28
3.3. Tahap Pengumpulan dan Pengolahan Data . . . . .	28
3.3.1. Pengambilan Data . . . . .	28
3.3.2. Pengolahan Data . . . . .	29
3.4. Tahap Analisa dan Kesimpulan . . . . .	32
3.4.1. Analisis Hasil Simulasi . . . . .	32
3.4.2. Kesimpulan . . . . .	32
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>33</b>
4.1. Persamaan Pengatur pada Konstruksi Fluida . . . . .	33
4.1.1. Persamaan Kontinuitas . . . . .	34
4.1.2. Persamaan Momentum . . . . .	37
4.2. Rata-Rata Kedalaman . . . . .	49
4.2.1. Kedalaman Rata-Rata Persamaan Kontinuitas . . . . .	49
4.2.2. Kedalaman Rata-Rata Persamaan Momentum Arah $x$ . . . . .	52
4.2.3. Kedalaman Rata-Rata Persamaan Momentum Arah $y$ . . . . .	54
4.3. Hubungan Antara Dasar dengan Permukaan Gelombang . . . . .	56
4.4. Linierisasi Persamaan Sistem Gelombang Air dangkal . . . . .	59
4.5. Skema Godunov . . . . .	61
4.6. Analisis Kestabilan . . . . .	64
4.7. Simulasi dan Interpretasi . . . . .	69
<b>V PENUTUP . . . . .</b>	<b>72</b>
5.1. Kesimpulan . . . . .	72
5.2. Saran . . . . .	73





## DAFTAR GAMBAR

xiii







pulau yang umumnya digunakan sebagai jalur penyeberangan. Beberapa selat yang berada di Indonesia yaitu Selat Madura, Selat Bangka, Selat Sunda, Selat Malaka, dan lain sebagainya (Rahmawitri dkk., 2017).

Selat Sunda merupakan jalur perhubungan transportasi laut antara pulau Jawa dengan pulau Sumatera. Terdapat beberapa pelabuhan yang berada di antara pulau Sumatera dan Jawa yang jalur transportasinya melalui Selat Sunda yaitu pelabuhan teluk bayur, pelabuhan merak, pelabuhan bekauheni, dan lain sebagainya (Prawiradisastra, 2005). Namun karena letaknya yang berada di posisi garis khatulistiwa menyebabkan kondisi angin yang tidak menentu serta gelombang pasang surut air laut dan arus laut yang cukup besar menyebabkan sering terjadinya kecelakaan transportasi laut (Nugraha et al., 2014).

Kecelakaan transportasi laut sering kali terjadi di Indonesia. Kecelakaan tersebut terjadi diakibatkan oleh ketinggian gelombang yang tidak menentu. Menurut data investigasi kecelakaan pelayaran oleh KNKT, dari tahun 2010 sampai 2016 terdapat 54 kecelakaan transportasi laut yang diakibatkan kandas, tenggelam atau terbalik, ledakan atau kebakaran, dan lain-lain. Adapun sebanyak 34% dari banyaknya kecelakaan transportasi laut yang terjadi di Indonesia diakibatkan karena kondisi cuaca yang buruk dan kondisi ketinggian gelombang yang tidak menentu menyebabkan kapal tenggelam atau terbalik dan juga karam. Salah satu kecelakaan transportasi laut di Indonesia terjadi di perairan Selat Sunda pada 13 Desember 2016 yaitu kapal tenggelam. Kecelakaan tersebut terjadi di Utara Pulau Salira diakibatkan kapal memiliki muatan yang cukup banyak dan hantaman gelombang air laut yang cukup tinggi menyebabkan ketahanan dari kapal tersebut tidak seimbang yang kemudian membuat kapal tersebut terbalik dan tenggelam (Komite Nasional Keselamatan Transportasi, 2016).





Pada penelitian yang dilakukan oleh dari Bobby M. Ginting et. all pada tahun 2011 tentang model propagasi aliran banjir 2 dimensi yang diakibatkan oleh reruntuhan bendungan menggunakan metode volume hingga didapatkan bahwa model yang digunakan dengan metode volume hingga tersebut memberikan hasil yang baik dan akurat yaitu dengan nilai *error* untuk kedalaman yaitu sebesar 1.33% dan nilai *error* untuk kecepatan aliran sebesar 1.85% (Ginting, 2011).

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka pada penelitian ini akan dilakukan penerapan metode volume hingga pada gelombang air laut dengan judul penelitian yaitu Implementasi Metode Volume Hingga pada Gelombang Air Laut di Perairan Selat Sunda. Pentingnya penelitian ini dikarenakan Selat Sunda merupakan salah satu selat yang terdapat aktivitas jalur transportasi serta aktivitas gunung api yang aktif serta memiliki ketinggian gelombang yang tidak menentu. Sehingga penelitian ini dapat digunakan sebagai informasi simulasi model matematis gelombang air laut yang terjadi di Perairan Selat Sunda.

Berdasarkan latar belakang yang telah dijabarkan sebelumnya, maka diambil beberapa pokok permasalahan yaitu:

- ### 1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dijelaskan sebelumnya, maka tujuan yang ingin di capai pada penelitian ini yaitu:

- #### 1.4. Manfaat Penelitian

Adapun adanya penelitian ini memberi manfaat yakni:



- ### 1.5. Batasan Masalah

- a. Permasalahan yang digunakan ditinjau sebagai masalah dua dimensi.
- b. Persamaan yang digunakan yaitu persamaan gelombang air dangkal (*shallow water equation*).
- c. Studi kasus dalam penelitian ini yaitu perairan Selat Sunda yang terletak pada  $-6.026957$  LS dan  $105.7376$  BT. Adapun data yang digunakan merupakan data sampel kecepatan rata-rata air laut dan ketinggian gelombang rata-rata .
- d. Skema pada metode volume hingga yang digunakan pada penelitian ini yakni skema *Godunov*.

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam menyusun laporan skripsi ini terdiri dari lima bab dimana masing-masing bab dibagi dalam subbab yaitu sebagai berikut:

## 2. BAB II

Bab ini menjelaskan mengenai tinjauan pustaka dan teori-teori yang menjadi dasar untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan penelitian. Selain itu, pada bab ini digunakan sebagai kajian dari beberapa literatur yang terkait dengan topik penelitian meliputi pengertian gelombang, persamaan gelombang air dangkal, metode volume hingga, skema *lax Friedrichs*, skema godunov, syarat kestabilan dari sistem persamaan, serta metode perturbasi yang digunakan sebagai pelinearisasian model persamaan.

Bab ini berisi tentang metode penelitian yakni berisi deskripsi data yang dipergunakan, serta tahapan-tahapan yang dilakukan untuk penyelesaian penelitian tentang implementasi metode volume hingga pada penyelesaian numerik gelombang air laut di perairan Selat Sunda.

Pada bab ini berisi hasil dan pembahasan, dilakukan proses penurunan rumus agar didapatkan persamaan pengatur pada model gelombang air laut, selain itu dilakukan diskritisasi, analisis kestabilan, dan dilakukan simulasi serta interpretasi terhadap model persamaan yang dibangun dengan menggunakan metode volume hingga dengan skema Godunov.





Gelombang air laut dibedakan menjadi beberapa macam (Higuera et. al., 2013), yaitu:

Gelombang angin yang terjadi karena adanya tiupan angin pada permukaan laut. Gelombang air laut dapat menimbulkan energi yang secara berkala dapat membentuk pantai. Selain itu gelombang ini menimbulkan arus dan membawa endapan hasil pelapukan batuan dalam arah tegak lurus dan sepanjang garis pantai.

Gelombang pasang surut yang terjadi yang diakibatkan oleh adanya gaya tarik menarik bulan dengan matahari terhadap matahari. Gelombang ini dapat menimbulkan arus gelombang yang cukup kuat terutama di daerah yang sempit, misalnya muara sungai dan teluk. Selain itu, tinggi dari muka air pasang surut sangat penting dalam perencanaan bangunan yang akan dibangun di pantai. Misalnya, tinggi muka air pasang digunakan sebagai patokan pembangunan dari bangunan sekitar pantai, sementara tinggi muka air surut digunakan sebagai alur pelayaran dari nelayan untuk memperkirakan kedalaman laut.

Gelombang tsunami terjadi diakibatkan oleh adanya gempa atau letusan gunung yang berpusat di laut. Gelombang tsunami yang terjadi beragam yaitu dari 0,5 meter sampai dengan 20 meter dan periode terjadinya gelombang tsunami pun berkala dari beberapa menit sampai satu jam. Tinggi gelombang tsunami dipengaruhi oleh bentuk dari dasar laut. Ketinggian gelombang





Persamaan diferensial parsial (PDE) biasanya digunakan dalam seluruh bidang matematika terapan, salah satunya dalam hal pemodelan. Permasalahan praktis dapat dimodelkan dengan menggunakan konsep persamaan diferensial parsial misalnya desain mobil berkecepatan tinggi, peramalan kondisi cuaca, mendesain model pesawat terbang, serta masalah yang ada di alam. Berbagai jenis PDE masing-masing dapat menunjukkan berbagai sifat fisik yang ada di lingkungan, seperti penyebaran panas dalam suatu konduksi, mekanika fluida seperti gelombang air laut, tsunami, serta pergerakan aliran lahar, evolusi serta populasi penyakit, dan sifat fisika matematis lainnya (Shearer, 2015).

### 2.3. Kaidah *Leibniz*

## 1. Aturan untuk Satu Variabel

[illegible]

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dt + f(v(x), x) \frac{d}{dx} v(x) - f(u(x), x) \frac{d}{dx} u(x) \quad (2.6)$$

Integral merupakan anti turunan. Aplikasinya diterapkan untuk menghitung luas ataupun volume. Penjumlahan seluruh luas yang dipartisi atau dibagi menjadi luas satuan kemudian perubahan terhadap ruang  $x$  diasumsikan sangat kecil dengan pendekatan limit untuk  $\Delta x \rightarrow 0$  maka penjumlahan tersebut menggunakan kaidah *Riemann* (David. B dan George. C., 1995).

1. Pandang suatu partisi  $C$  dan interval  $[a,b]$  menjadi  $n$  bagian banyaknya yang memakai titik-titik  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  dan misalkan  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Pada setiap selang bagian  $[x_{i-1}, x_i]$ , diambil sebuah titik sebarang  $a$  yang disebut titik sampel untuk selang bagian ke- $i$ .





Sedangkan untuk mencari vektor eigen dengan nilai  $\lambda = 6$  dari matriks  $B$  dapat digunakan rumus pada Persamaan (2.8), yaitu:

$$\begin{aligned} (B - \lambda)x &= 0 \\ \left( \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 16 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.) \quad & -6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ (2.) \quad & 16x_1 - 8x_2 = 0 \Rightarrow 8(2x_1 - x_2) = 0 \\ & 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = x_2 \end{aligned}$$

make  $x_1 = \frac{1}{2}t$

sehingga didapatkan hasil vektor eigen dari  $\lambda = 6$  yakni  $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Secara geometri dapat dilihat pada Gambar 2.3 bahwa hasil perkalian matriks  $B$  dengan vektor  $x$  yakni  $x = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix}$  yang memiliki nilai eigen  $\lambda = 6$ ,

dikarenakan  $Bx = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 6x.$





**Gambar 2.2 Fenomena Persamaan Air Dangkal ( (Farouq dan Adytia, 2018))**

Pada Gambar 2.2 merupakan contoh dari sistem persamaan air dangkal satu dimensi dimana variabel  $x$  adalah variabel jarak,  $t$  merupakan variabel waktu,  $\lambda$  merupakan panjang gelombang air,  $h = h(x, t)$  adalah kedalaman air,  $u$  merupakan kecepatan dalam arah  $x$ ,  $n(x, t)$  merupakan perubahan ketinggian air,  $g = 9,81 m/s^2$  adalah percepatan gravitasi. Bentuk persamaan air dangkal satu dimensi yaitu pada Persamaan (2.11) (Farouq dan Adytia, 2018).

(2.10)

(2.11)

Karakteristik aliran dapat dijelaskan secara matematis dengan menggunakan persamaan air dangkal (*shallow water equation*) (Ginting, 2011). Bentuk persamaan air dangkal dua dimensi dapat dilihat pada Persamaan (2.12), (2.13), dan (2.14).

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{g}{2}h^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{\partial}{\partial x} b \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(hv^2 + \frac{g}{2}h^2)}{\partial y} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} = -gh\frac{\partial}{\partial y}b \quad (2.14)$$

Pada Persamaan (2.12) merupakan persamaan kontinuitas, sedangkan Persamaan (2.13) adalah persamaan kekekalan momentum dalam arah  $x$  dan (2.14) adalah persamaan kekekalan momentum dalam arah  $y$ . Pada Persamaan (2.13) dan (2.14) terdapat beberapa gaya lainnya seperti gaya angin dan lain sebagainya, tetapi hal tersebut diabaikan karena pengaruhnya sangat kecil (Jameson dan Turkel, 1981).

### 1. Persamaan Kontinuitas

[illegible]

Persamaan momentum didapatkan berdasarkan konsep fisika yang berkaitan dengan momentum. Salah satu konsep fisika tersebut yaitu Hukum Newton II. Pada Hukum Newton II dinyatakan, total gaya ( $\Sigma F$ ) merupakan hasil perkalian antara percepatan ( $a$ ) dengan massa ( $m$ ). Adapun untuk rumus Hukum Newton II dapat dilihat pada Persamaan (2.15).

Menurut K. Anastasiou dan C. T. Chan persamaan air dangkal memiliki beberapa keunggulan yaitu (Ai dan Jin, 2009):

- ## 2.7. Metode Volume Hingga

Metode volume hingga (*finite volume method*) merupakan metode numerik yang digunakan untuk merepresentasikan persamaan diferensial dengan mendiskritisasi yang sesuai untuk simulasi numerik dari berbagai macam tipe

### Gambar 2.3 Diskritisasi Metode Volume Hingga

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t^n) dx$$











## METODE PENELITIAN

### 3.1. Jenis Penelitian

27

## **3.2. Tahap Persiapan**

### **3.2.1. Identifikasi Masalah**

Masalah yang diangkat pada penelitian ini yaitu ketinggian gelombang air laut yang tidak menentu menyebabkan terjadinya kecelakaan transportasi laut yang terjadi. Oleh karena itu, penelitian kali ini yaitu mengimplementasikan metode volume hingga pada simulasi model gelombang air laut dengan studi kasus pada perairan Selat Sunda. Identifikasi masalah dilakukan dengan melakukan studi dan mencari data yang berkaitan dengan ketinggian gelombang air laut yang tidak menentu.

### **3.2.2. Studi Literatur**

Studi literatur dilakukan agar didapatkan teori-teori serta kajian ataupun penelitian terdahulu dengan membaca referensi yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

## **3.3. Tahap Pengumpulan dan Pengolahan Data**

### **3.3.1. Pengambilan Data**

Data pada penelitian ini didapatkan dari Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG) yaitu dengan studi kasus perairan Selat Sunda. Pemilihan daerah yang diteliti yaitu Perairan Selat Sunda yang terletak  $-6.026957^{\circ}\text{LS}$  dan  $105.7376^{\circ}\text{BT}$ . Informasi letak koordinat tersebut sebagai acuan koordinat pada data penelitian skripsi ini. Adapun data yang digunakan merupakan data sampel kecepatan rata-rata air laut dan ketinggian gelombang rata-rata.



Persamaan (2.12), (2.13), (2.14).

b. Diskritisasi Model Metode Volume Hingga

Persamaan yang didapatkan kemudian dimodifikasi dengan menggunakan persamaan diferensial parsial (PDP) agar didapatkan model persamaan yang akan digunakan sebagai pendekatan numerik yaitu dengan menggunakan metode volume hingga yang ditunjukkan pada persamaan (2.20).

### c. Analisis Konvergensi

Kemudian dilakukan analisa konvergensi yaitu dengan menganalisa kestabilan terhadap persamaan yang diturunkan sebelumnya guna mendapatkan hasil simulasi yang baik. Dalam melakukan analisa kestabilan dilakukan dengan menggunakan syarat *von neumann* yaitu pada Persamaan (2.21) serta hasil dari analisa kestabilan *von neumann* apakah stabil atau tidak hanya dengan model diperlukan syarat cukup yakni pada persamaan (2.22)

#### d. Model Simulasi Persamaan Numerik

Dilakukan simulasi terhadap persamaan numerik yang didapatkan dengan melakukan beberapa model pengujian dengan menginisialisasi terhadap kondisi atau variabel-variabel terkait yang akan dimodelkan. Selanjutnya, dilakukan simulasi terhadap keadaan sebenarnya yaitu dengan menggunakan data sampel ketinggian dan kecepatan yang ada pada perairan Selat Sunda guna mengetahui keadaan gelombang yang sesungguhnya.

#### e. Analisa Hasil

Hasil dari simulasi model numerik dari metode volume hingga yaitu









Konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi dimulai dari penurunan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan-persamaan momentum, kondisi batas kinematik gelombang air, kemudian penurunan tekanan hidrostatik untuk gelombang air dangkal dua dimensi dari persamaan momentum arah  $z$ .

Berdasarkan hukum perpindahan massa terhadap suatu elemen volume yang dimisalkan dengan berbentuk kubus. Sisi-sisi tersebut yaitu  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , dan  $\Delta z$  yang dilalui oleh fluida, maka dapat dilakukan penurunan rumus pada persamaan kontinuitas. Misalkan  $\rho$  merupakan massa jenis dari suatu fluida, maka  $u$ ,  $v$ , dan  $w$  atau dapat disimbolkan dengan  $q$ . Dapat dikatakan bahwa  $q(u, v, w)$  merupakan kecepatan partikel fluida yang bergerak searah dengan titik-titik koordinat ruang fluida tersebut, yakni  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ .

[illegible]

**Tabel 4.1 Massa Fluida**

Jumlah Masuk	Jumlah Keluar
$(\rho u) _x \Delta y \Delta z$	$(\rho u) _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$
$(\rho v) _y \Delta x \Delta z$	$(\rho v) _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$
$(\rho w) _z \Delta x \Delta y$	$(\rho w) _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$

Apabila rapat massa fluida (massa jenis fluida) adalah  $\rho$  dan misalkan arah aliran merupakan ke arah  $x$ , maka rata-rata massa fluida yang masuk pada kubus yang melambangkan elemen volume dari fluida per satuan waktu (melalui bidang  $x$ ) yaitu sebesar  $(\rho u)|_x \Delta y \Delta z$  dan rata-rata fluida yang keluar melalui bidang  $x + \Delta x$  adalah  $(\rho u)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ , dengan  $u$  menyatakan komponen kecepatan dalam arah  $x$ . Sementara dalam arah  $y$  didapatkan rata-rata massa fluida yang masuk pada elemen volume (kubus) per satuan waktu (melintasi bidang  $y$ ) adalah  $(\rho v)|_y \Delta x \Delta z$  dan rata-rata yang keluar melewati bidang  $y + \Delta y$  adalah  $(\rho v)|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ , dengan  $v$  menyatakan komponen kecepatan dalam arah  $y$ . Sedangkan dalam  $z$  didapatkan rata-rata massa yang masuk pada elemen volume (kubus) per satuan waktu (melintasi bidang  $z$ ) adalah  $(\rho w)|_z \Delta x \Delta y$  dan rata-rata yang keluar melewati bidang  $z + \Delta z$  adalah  $(\rho w)|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$ , dengan  $w$  menyatakan komponen kecepatan dalam arah  $z$ .

Pada reaksi kimia diasumsikan bahwa tidak ada massa yang hilang pada suatu percobaan, begitupula perubahan massa rata-rata. Perubahan tersebut merupakan selisih antara rata-rata fluida yang masuk ke bidang dengan rata-rata fluida yang keluar dari bidang. Maka diperoleh persamaan kesetimbangan massa

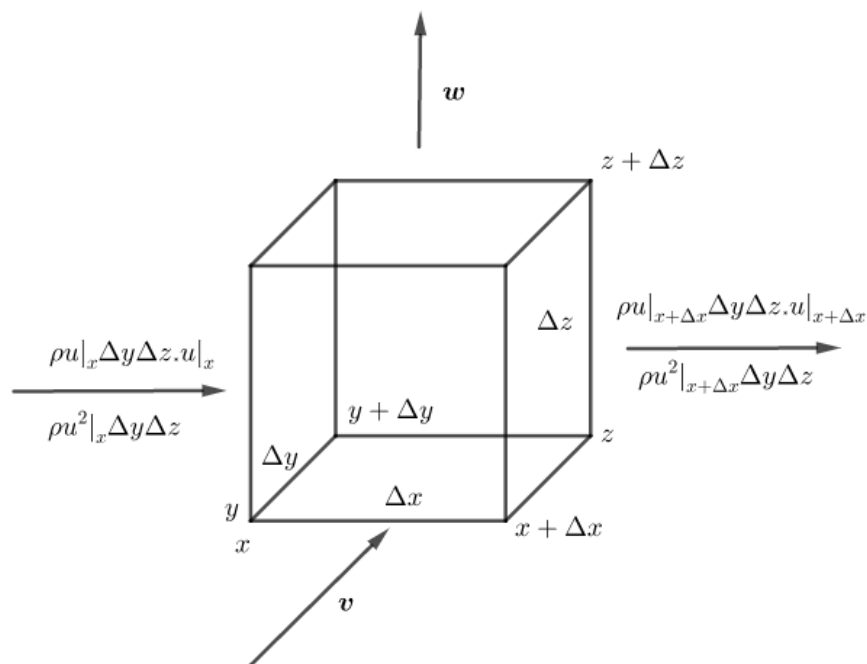
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= [(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [(\rho v)|_y - (\rho v)|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \\
&\quad + [(\rho w)|_z - (\rho w)|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \\
&= \rho u \Delta y \Delta z - (\rho u + \frac{\rho u}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z + \rho v \Delta x \Delta z - (\rho v + \frac{\rho v}{\partial y} \Delta y) \Delta x \Delta z \\
&\quad + \rho w \Delta x \Delta y - (\rho w + \frac{\rho w}{\partial z} \Delta z) \Delta x \Delta y \\
&= \rho u \Delta y \Delta z - \rho u \Delta y \Delta z - \frac{\rho u}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \rho v \Delta x \Delta z - \rho v \Delta x \Delta z \\
&\quad - \frac{\rho v}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \rho w \Delta x \Delta y - \rho w \Delta x \Delta y - \frac{\rho w}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= - \frac{\rho u}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\rho v}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\rho w}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\rho u}{\partial x} - \frac{\rho v}{\partial y} - \frac{\rho w}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\left(\frac{\rho u}{\partial x} + \frac{\rho v}{\partial y} + \frac{\rho w}{\partial z}\right)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Apabila massa jenis fluida tetap dan kedua ruas dibagi dengan massa jenis  $\rho$ , maka  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Sehingga didapatkan persamaan kontinuitas yaitu pada persamaan (4.2).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$



Dari hasil pada Persamaan (4.5), terlihat bahwa perubahan momentum pada fluida terjadi secara tiga arah yakni  $x$ ,  $y$  dan  $z$ . Untuk meninjau rata-rata perubahan momentum pada elemen volumen yaitu dengan menghitung selisih dari rata-rata momentum yang masuk ke sistem dan rata-rata yang keluar dari sistem yang kemudian hasilnya ditambahkan dengan jumlah gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut. Ilustrasi neraca kesetimbangan momentum terdapat pada Gambar 4.2. Neraca kesetimbangan momentum adalah persamaan vektor, dimana setiap komponen yang bekerja pada fluida menyatakan arah gerak fluida yang sesuai dengan koordinat elemen hingga.



**Gambar 4.2 Ilustrasi Keseimbangan Momentum**

Dari Gambar 4.2 dapat dilihat yaitu apabila ditinjau dari arah  $x$ , fluida dengan massa jenis  $\rho$  dan bergerak dengan kecepatan  $u$  dengan melalui bidang  $x$  maka apabila bergerak dalam selang waktu didapatkan hasil sebanyak  $\rho V|_x = \rho u|_x \Delta y \Delta z$ . Momentum fluida yang melintas bidang  $x$  sebesar  $\rho V|_x = \rho u|_x \Delta y \Delta z \cdot u|_x$ . Sehingga apabila ditinjau dari ketiga elemen volume, neraca kesetimbangan momentum terhadap arah  $x$  dapat dilihat pada Tabel 4.2.

Masuk	Keluar
$\rho u^2 _x \Delta y \Delta z$	$\rho u^2 _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$
$\rho uv _y \Delta x \Delta z$	$\rho uv _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$
$\rho uw _z \Delta x \Delta y$	$\rho uw _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$

$$\begin{aligned} W &= m.g \\ &= (\rho V)g \\ &= (\rho g(\Delta x \Delta y \Delta z)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

























$$\int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (4.21)$$

Dengan menggunakan aturan *Leibniz* pada Persamaan (2.6), persamaan di atas dapat diuraikan satu per satu.

$$\begin{aligned} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} u dz - u \Big|_{\eta(x,y,t)} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial x} - u \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} u dz - u \Big|_{\eta} \eta_x - u \Big|_{-b} b_x \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} v dz - v \Big|_{\eta(x,y,t)} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial y} - v \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} v dz - v \Big|_{\eta} \eta_y - v \Big|_{-b} b_y \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= w \Big|_{\eta(x,y,t)} - w \Big|_{-b(x,y)} \\ &= w \Big|_{\eta} - w \Big|_b \end{aligned} \quad (4.24)$$

Apabila Persamaan (4.22), (4.23), dan (4.24) apabila disubstitusikan ke Persamaan (4.21) akan didapatkan hasil sebagai berikut:

Didapatkan hasil substitusi yaitu menyatakan rata-rata kedalaman untuk persamaan kontinuitas yaitu pada Persamaan (4.25).

Selanjutnya, hasil pada Persamaan (4.25) diaproksimasi dengan menggunakan Kaidah *Riemann*. Hasil aproksimasi dapat dilihat pada Persamaan (4.26) dan (4.27) sebagai berikut.

$$\int_{-b}^{\eta} v dz \approx v(\eta + b) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\eta} u_i \Delta z_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\eta} v_i \Delta z_i \right) + \eta_t = 0 \quad (4.28)$$

Karena  $\Delta z \neq 0$  maka operator limit diabaikan dengan mengasumsikan bahwa  $z$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(\eta + b)] = 0 \quad (4.29)$$

Langkah selanjutnya yaitu melakukan penentuan kedalaman rata-rata dari gelombang dengan menggunakan persamaan momentum arah  $x$  dapat diuraikan seperti berikut:

$$\int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz = \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dz \quad (4.30)$$

[illegible]

$(\eta + b)$  independen terhadap  $z$  sehingga dapat ditulis:

$$\int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} u dz - u \Big|_{\eta(x,y,t)} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial t} - u \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial t} \quad (4.31)$$

$$\int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} u^2 dz - u^2 \Big|_{\eta(x,y,t)} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial x} - u^2 \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \quad (4.32)$$

$$\int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial uv}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} u^2 dz - uv \Big|_{\eta(x,y,t)} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial y} - uv \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \quad (4.33)$$

$$\int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz = uw \Big|_{\eta(x,y,t)} + uw \Big|_{-b(x,y)} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
 -g \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dz &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( z \Big|_{\eta(x,y,t)} + z \Big|_{-b(x,y)} \right) \\
 &= -g(\eta + b) \frac{\partial \eta}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Hasil dari penjabaran pada Persamaan (4.31), (4.32), (4.33), (4.34), dan (4.35) terhadap Persamaan momentum arah  $x$  yaitu pada Persamaan (4.30). Sehingga didapatkan hasil penjabaran sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} uv dz - u \Big|_{\eta(x,y,t)} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial t} - uv \Big|_{\eta(x,y,t)} \\ & \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial y} - u^2 \Big|_{\eta(x,y,t)} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial x} + uw \Big|_{\eta(x,y,t)} - u \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial t} - u^2 \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \\ & - uv \Big|_{-b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} + uw \Big|_{-b(x,y)} = -g(\eta + b) \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan hasil rata-rata kedalaman momentum arah  $x$  yaitu dapat dilihat

atau dapat ditulis dengan Persamaan (4.37).

$$\begin{aligned}
-g(\eta+b)\frac{\partial\eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\lim_{\Delta z\rightarrow 0}\sum_{i=1}^{\eta}u_i\Delta z_i\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{\Delta z\rightarrow 0}\sum_{i=1}^{\eta}u_i^2\Delta z_i\right) \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial y}\left(\lim_{\Delta z\rightarrow 0}\sum_{i=1}^{\eta}u_iv_i\Delta z_i\right) \tag{4.37}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial((\eta+b)u)}{\partial t} + \frac{\partial((\eta+b)u^2)}{\partial x} + \frac{\partial((\eta+b)uv)}{\partial y} = -g(\eta+b)\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (4.38)$$

Langkah selanjutnya yaitu melakukan penentuan kedalaman rata-rata dari gelombang dengan menggunakan persamaan momentum arah  $y$  dapat diuraikan seperti pada Persamaan (4.39) berikut.

[illegible]



atau dapat ditulis seperti Persamaan (4.46) berikut:

$$\begin{aligned}
-g(\eta + b) \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\eta} v_i \Delta z_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\eta} v_i^2 \Delta z_i \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\eta} u_i v_i \Delta z_i \right) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial((\eta+b)v)}{\partial t} + \frac{\partial((\eta+b)v^2)}{\partial y} + \frac{\partial((\eta+b)uv)}{\partial x} = -g(\eta+b)\frac{\partial\eta}{\partial y} \quad (4.47)$$

Hubungan antara dasar dengan permukaan gelombang pada gelombang air dangkal dapat dilihat pada Gambar 4.4.





$$\begin{aligned} \frac{\partial h v}{\partial t} + \frac{\partial h u v}{\partial x} + \frac{\partial h v^2}{\partial y} &= -g h \frac{\partial (h + b)}{\partial y} \\ &= -g h \frac{\partial h}{\partial y} - g h \frac{\partial b}{\partial y} \\ &= -g \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (h^2) \right] - g h \frac{\partial b}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial \left( \frac{1}{2} g h^2 \right)}{\partial y} - g h \frac{\partial b}{\partial y} \\ \frac{\partial h u}{\partial t} + \frac{\partial h u^2}{\partial x} + \frac{\partial h u v}{\partial y} &= -\frac{\partial \left( \frac{1}{2} g h^2 \right)}{\partial y} - g h \frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned}$$



[digilib.uinsby.ac.id](http://digilib.uinsby.ac.id)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]











$$s^{n+1}e^{ia(j+k+\frac{1}{2})} = s^ne^{ia(j+k+\frac{1}{2})} - g\frac{\Delta t}{\Delta x}(p^{n+1}e^{ia(j+k+1)} - p^n$$





sehingga didapatkan untuk  $\beta^2 > 1$ , metode tidak stabil karena hasil norm nilai eigen yaitu lebih dari 1, dimana tidak memenuhi syarat kestabilan.

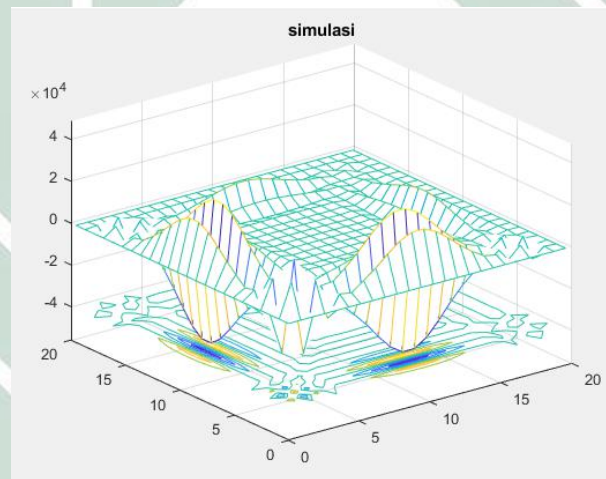
$$\lambda_{1,2} = \beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2}$$
$$\begin{aligned} |\lambda_{1,2}| &= |\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2}| \\ &= |\sqrt{\beta^2 + (1-\beta^2)}| \\ &= 1 \end{aligned}$$
$$-1 \leq \beta \leq 1$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - 4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \leq 1 \\ -1 - 1 &\leq 1 - 1 - 4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \leq 1 - 1 \\ -2 &\leq -4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq 4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \leq 2$$
[illegible]



Pada simulasi ini, diberikan nilai awal  $h(x, y, 0) = b \times e^{-5(x^2+y^2)}$  dan  $u(x, y, 0) = 0$  dengan  $\Delta y = \Delta x = 0.85, \Delta t = 0.05$ , dengan menggunakan data kedalaman Selat Sunda yaitu 100m. Sehingga simulasi Persamaan (4.62), (4.63), dan (4.64) dapat dilihat pada Gambar (4.8). Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa solusi persamaan gelombang air dangkal linier 2 dimensi dengan menggunakan metode volume hingga skema godunov memenuhi syarat kestabilan. Dari Gambar 4.7 bahwa gelombang pada saat  $t = 0$  bergerak menuju ke angka 0.

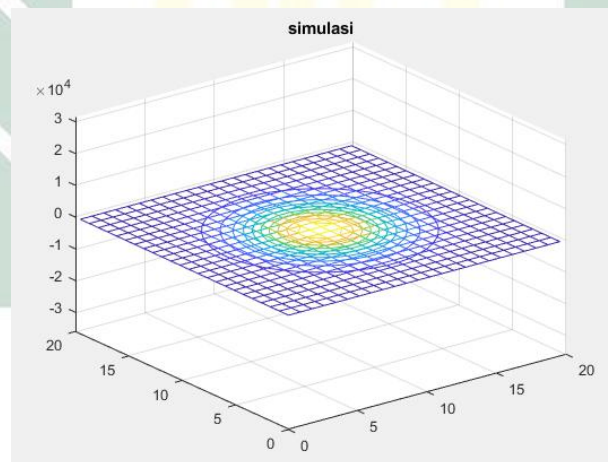


**Gambar 4.6 Simulasi Persamaan (4.62), (4.63), dan (4.64) pada saat  $t = 0$**

[illegible]

**Gambar 4.8 Simulasi Persamaan (4.62), (4.63), dan (4.64) pada saat  $t = 12$**

Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, persamaan gelombang air dangkal dengan menggunakan metode volume hingga skema godunov stabil sesuai dengan syarat  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2gb} \leq 1$ .



**Gambar 4.8 Simulasi Persamaan (4.62), (4.63), dan (4.64) pada saat  $t = 12$**

Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, persamaan gelombang air dangkal dengan menggunakan metode volume hingga skema godunov stabil sesuai dengan syarat  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2gb} \leq 1$ .

## BAB V

# PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan ringkasan hasil penelitian yang berupa kesimpulan dan saran-saran yang dapat diterapkan guna pengembangan dari pemodelan matematis dari permasalahan yang dikaji.

## 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang didapatkan penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini yaitu dapat disimpulkan bahwa:

1. Penyelesaian numerik gelombang pasang air laut di Perairan Selat Sunda menggunakan (*finite volume method*) dengan skema godunov yaitu memiliki bentuk pada Persamaan (4.62), (4.63), dan (4.64).
2. Syarat kestabilan dari metode volume hingga (*finite volume method*) untuk persamaan gelombang air dangkal dua dimensi yaitu  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2gb} \leq 1$ . Artinya, syarat kestabilan bergantung pada nilai selang pada arah x ( $\Delta x$ ), selang waktu ( $\Delta t$ ), gaya gravitasi ( $g$ ) dan batas bawah dasar gelombang ( $b$ ). Apabila tidak memenuhi syarat kestabilan tersebut, maka akan terjadi *blow up* atau penyelesaian menuju tak hingga.
3. Hasil simulasi pada penelitian ini menunjukkan bahwa penyelesaian persamaan air dangkal dengan menggunakan metode volume hingga skema godunov stabil.







- [illegible]



